

سوالات تشریحی حسابان یازدهم ریاضی - فصل پنجم

درس اول: مفهوم حد و فرایندهای حدی

- ۱- آیا تابع $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ در نقطه $x = 1$ حد دارد؟ چرا؟
- ۲- اگر بازه $(x - 1, 2y + 5)$ یک همسایگی راستِ محذوف ۳ باشد، مجموعه مقادیر x و y را به دست آورید.
- ۳- نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که در یک همسایگی محذوف نقطه $x = 3$ تعریف شود ولی در این نقطه حد نداشته باشد.
- ۴- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & x > 1 \\ x^2 - 2 & x < 1 \end{cases}$ را رسم کرده، سپس با استفاده از نمودار حد تابع در نقطه $x = 1$ را بررسی کنید.
- ۵- کدام یک از مجموعه‌های زیر یک همسایگی محذوف ۳ نیست؟
 - الف) $A = (-2, 3) \cap (3, 4)$
 - ب) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - 3| < 1\}$
 - پ) $C = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{|x - 3|} > 1\right\}$
 - ت) $B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| > 2\}$
 - ث) $(1, 2) - \{3\}$
- ۶- برای تابع $f(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x - [x]}$ به سوال‌های زیر جواب دهید.
 - الف) این تابع در همسایگی محذوف کدام نقاط تعریف شده است به طوری که در خود آن نقاط تعریف نشده است؟
 - ب) این تابع در یک همسایگی چپ کدام نقاط تعریف شده است و در هیچ همسایگی راست آن نقاط تعریف نشده است؟
 - پ) این تابع در یک همسایگی راست کدام نقاط تعریف شده است و در هیچ همسایگی چپ آن نقاط تعریف نشده است؟
- ۷- آیا تابع $f(x) = \frac{x}{[x]}$ در همسایگی صفر تعریف شده است؟ چرا؟

۸- در هر یک از حالت‌های زیر نمودار تابعی را رسم کنید که شرایط گفته شده را داشته باشد.
 (الف) تابع در ۱ تعریف نشده باشد، ولی در یک همسایگی محذوف ۱ تعریف شده باشد، و در این نقطه حد داشته باشد.

(ب) تابع در یک همسایگی صفر تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد، ولی حد آن غیر از مقدار تابع در صفر باشد.

(پ) تابع در یک همسایگی ۱- تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد و حد تابع برابر مقدار تابع در ۱- باشد.

(ت) نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هر دو در نقطه ۱- دارای حد یکسان باشند و $f(-1)$ تعریف شده باشد، ولی $g(-1)$ موجود نباشد.

۹- توابع $y = \frac{x}{[x]-2}$ و $y = \sqrt{x-2}$ به ترتیب در همسایگی و همسایگی عدد ۲ تعریف شده اند.

(۱) چپ - راست (۲) راست - چپ (۳) راست - راست (۴) چپ - چپ

۱۰- تابع $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 3 \\ 2x-4 & x > 3 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

(الف) آیا تابع f در نقطه $x = 3$ تعریف شده است؟

(ب) با رسم نمودار f و یا نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۳، مقدار $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ را به دست آورید.

۱۱- تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-4}$ را در نظر بگیرید.

(الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

(ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقاط است؟

(پ) آیا این تابع در همسایگی $2/9$ تعریف شده است؟

(ت) آیا تابع f در همسایگی چپ $x = -3$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x = -3$ چطور؟

۱۲- تابع $f(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-[x]}$ را در نظر بگیرید:

الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقاط است؟

پ) آیا تابع f در همسایگی چپ $x = 4$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x = 4$ چطور؟

ت) تابع در همسایگی راست کدام نقطه تعریف شده است که در هیچ همسایگی چپ آن تعریف نشده است؟

۱۳- تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{5-x}}{x^2-4}$ را در نظر بگیرید:

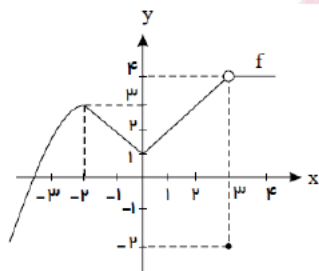
الف) دامنه تابع f را بیابید.

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقاط است؟

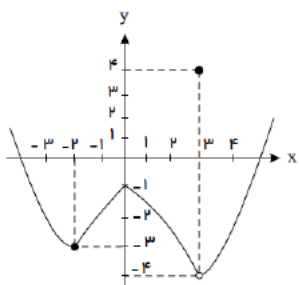
پ) تعیین کنید تابع f فقط در همسایگی چپ چه نقطه‌ای و فقط در همسایگی راست چه نقطه‌ای تعریف شده است؟

۱۴- اگر $(m+3, 1+2m)$ یک بازه متقارن به شعاع $3/5$ باشد، مرکز بازه متقارن $(m-1, m)$ را بیابید.

۱۵- نمودار تابع f به صورت مقابل است، حاصل عبارت $2 \lim_{x \rightarrow -2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} f(x) - f(3)$ را بیابید.



۱۶- در شکل مقابل، حاصل عبارتهای زیر را بیابید.



الف) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ب) $3 \lim_{x \rightarrow -2} f(x) + f(x) - f(-2)$

۱۷- با تکمیل جدول زیر، حد تابع f را در نقطه $x = -2$ به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x \neq -2 \\ 5 & x = -2 \end{cases}$$

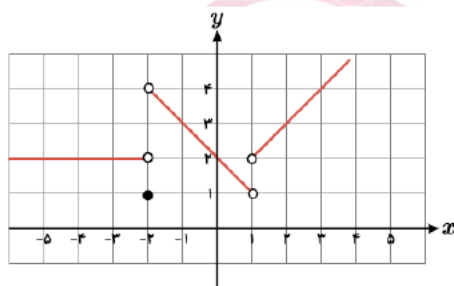
x	$-2/5$	$-2/1$	$-2/0.1$	$-2/0.01$	$\rightarrow -2 \leftarrow$	$-1/999$	$-1/99$	$-1/9$	$-1/8$
$f(x)$									

درس دوم: حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست)

۱۸- نمودار تابع f به صورت زیر است.

الف) دامنه این تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

ب) حدود زیر را در صورت وجود بیابید. ([] نماد جزء صحیح است.)



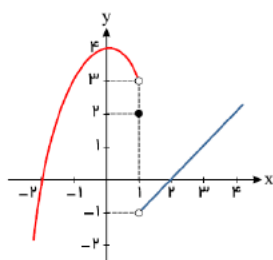
$$\lim_{x \rightarrow -2^+} [f(x)] \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \quad (3)$$

۱۹- با توجه به شکل، حاصل عبارت زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$2 \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + 3f(1) - \lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$

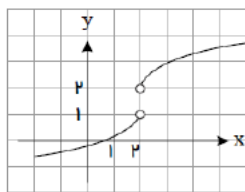


۲۰- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -2 & x \in \mathbb{Z} \\ 3 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را در فاصله $[-2, 2]$ رسم نموده و سپس با استفاده از

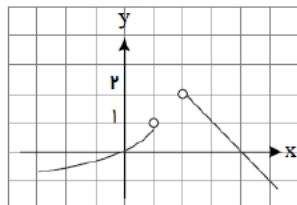
نمودار $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را به دست آورید.

۲۱- حد راست تابع $f(x) = \frac{x}{[x]-3}$ را در نقطه $x = 3$ بررسی کنید.

۲۲- با توجه به شکل مقابل، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)]$ را بیابید.



۲۳- با توجه به شکل، کمترین مقدار طبیعی n در معادله $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = n^2$ را به دست آورید.

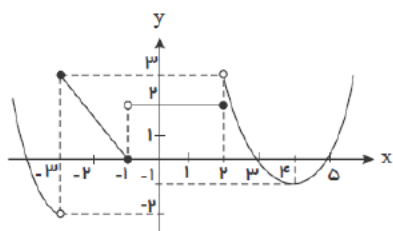


۲۴- الف) نمودار تابع $y = \log_2(x - 1)$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را به دست آورید.

ب) به کمک نمودار بالا $\lim_{x \rightarrow 1^-} y$ را به دست آورید.

پ) آیا تابع فوق در همسایگی $x = 1$ تعریف شده است؟

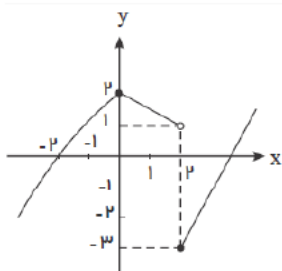
۲۵- نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل حدهای زیر را بیابید.



الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} [f \circ f(x)] - \lim_{x \rightarrow 2} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)]$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} [f(x)] + 2 \lim_{x \rightarrow (-3)^+} [f \circ f(x)] - \lim_{x \rightarrow 2^-} [f(x)]$

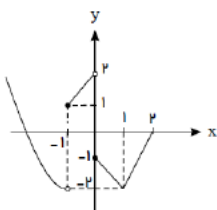
۲۶- نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل حدهای زیر را بیابید.



الف) $\lim_{x \rightarrow 0} [f \circ f(x)] + \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)]$

۲۷- شکل مقابل نمودار تابع f است. حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.



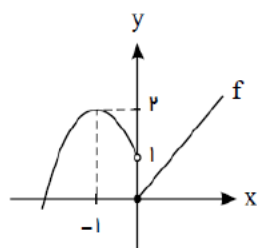
الف) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

۲۸- با استفاده از نمودار مقابل، عبارت‌های خواسته شده را در صورت وجود محاسبه کنید.



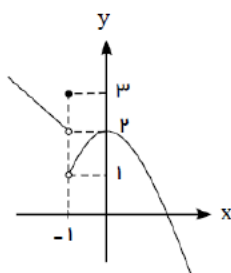
الف) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x)] + f(0)$

۲۹- با استفاده از نمودار روبه‌رو، عبارت خواسته شده را در صورت وجود محاسبه کنید.



الف) $2f(-1) + \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} [f(x)] - 2 \lim_{x \rightarrow -1} [f(x)]$

۳۰- حد چپ $f(x) = \frac{x}{[x]+3}$ را در نقطه $x = -2$ بررسی کنید.

۳۱- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x < 0 \\ x + 3 & x > 0 \end{cases}$ را رسم کرده و حدهای زیر را در صورت وجود

بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x)]$ پ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ت) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} [f(x)]$

۳۲- نمودار تابع $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ را رسم کرده و حد تابع را در نقطه $x = 2$ بررسی کنید.

۳۳- نمودار تابع $f(x) = x - [x]$ را رسم کرده و حد تابع را در نقطه $x = 2$ بررسی کنید.

۳۴- نمودار تابع $f(x) = \frac{x|x-1|}{x-1}$ را رسم کرده و حد تابع را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

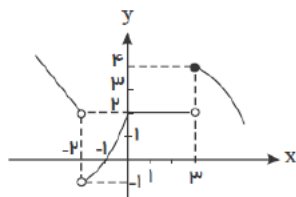
۳۵- با رسم نمودار تابع $f(x) = 2 - |x - 1|$ ، حدهای زیر را مشخص کنید.

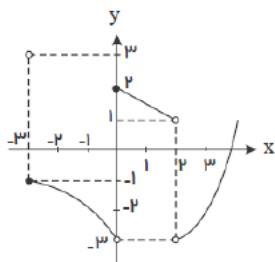
الف) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]$ ب) $\left[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right]$

۳۶- نمودار تابع f بصورت مقابل است، حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} [f(x)] + 2 \lim_{x \rightarrow (-2)^+} [f(x)]$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} [f(x)] - \lim_{x \rightarrow 3^+} [f(x)]$





۳۷- نمودار تابع f بصورت مقابل است، حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f \circ f(x)] - \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)]$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} [f \circ f(x)] + \left[\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \right]$

۳۸- در مورد حد چپ تابع $f(x) = \frac{x-1}{[-x]+3}$ در نقطه $x = 3$ چه می توان گفت؟

درس سوم: قضایای حد

۳۹- دو تابع $f(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ -x & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x & x > 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) ضابطه تابع $f+g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید.

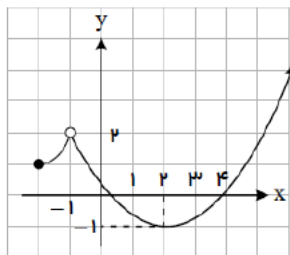
ب) نمودار تابع f ، g ، $f+g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را رسم کنید.

پ) آیا حد توابع f و g در 1 وجود دارند؟

ت) آیا حد توابع $f+g$ ، $f \cdot g$ ، $\frac{f}{g}$ در 1 وجود دارند؟

ث) آیا می توان از قضیه حد مجموع، حد ضرب و حد تقسیم در $x = 1$ استفاده کرد؟ چرا؟

۴۰- با توجه به نمودار تابع f در شکل روبه رو حدهای زیر را به دست آورید.



الف) $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{1 + f(x)}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{f(x) - 1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{27f(x)}$

۴۱- تابع f را طوری تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1} = 5$

۴۲- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$ ، آن گاه حد تابع با ضابطه $g(x) = \frac{3x - f(x)}{\sqrt{f(x)} + (f(x))^2}$ را در $x = 2$ به دست آورید.

۴۳- حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{3x^2+4} \times \frac{\sqrt{x-4}}{2x-4} \right)$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{\tan \frac{x}{2} + \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}$

پ) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \sqrt{x+1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin \frac{x}{2}}$

۴۴- حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. [] نماد جزء صحیح است.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} - \frac{7}{x^2-9}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x] + |x|}{x+1}$

۴۵- تابع f در نقطه $x = 3$ حد دارد، اگر $\lim_{x \rightarrow 3} (2f(x) - 3) = 13$ آن گاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + 4)$ را بیابید.

۴۶- تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{[x]-2}{x-2}$ را در نظر بگیرید. با کامل کردن جدول زیر، مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ را در صورت وجود به دست آورید. [] نماد جزء صحیح است

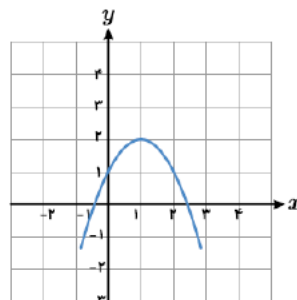
	$2/1$	$2/0.1$	$2/0.01$	
f				?

۴۷- نمودار تابع f به صورت زیر است. حدود زیر را در صورت وجود بیابید. [] نماد جزء صحیح است

الف) $\left[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right]$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)]$



۴۸- مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{x+8}}{x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{x \sin x}$

۴۹- a را طوری بیابید که $f(x) = \begin{cases} ax \left[\frac{1}{x} \right] & x \geq \frac{1}{2} \\ \cos \frac{\pi x}{2} & x < \frac{1}{2} \end{cases}$ در $x = \frac{1}{2}$ حد داشته باشد.

۵۰- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[-\frac{x}{2} \right] - \left[\frac{x}{3} \right]$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \left[\frac{4}{x} \right]$

۵۱- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \left[\frac{x}{1} \right] - 2 \left[\frac{x}{3} \right]$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \left[\frac{-3}{x} \right]$

۵۲- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})} \left[\frac{1}{x} \right]$

ب) $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{4})} \left[\frac{-2}{x} \right]$

۵۳- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \left[-\frac{x}{2} \right] + [x]$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\frac{x}{3} \right] - [-2x]$

۵۴- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} [x] - [-2x]$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} [-3x]$

۵۵- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} [2 \sin x]$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} [2 \cos x]$

۵۶- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \pi} [\sin x]$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} [\cos x]$

۵۷- حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x + [x]}{x^2 - 2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x - [-x]}{2x + |x|}$

۵۸- m را چنان بیابید که تابع $f(x) = m[x] + [2x] - 4$ در نقطه $x = 2$ حد داشته باشد.۵۹- مقدار a را طوری بیابید که $\lim_{x \rightarrow -3} (a[x + 4] + [-x])$ موجود باشد.

درس چهارم: محاسبه حد توابع کسری (حالت صفر صفرم)

۶۰- مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2|x| - 8}{x - 2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x}$

۶۱- حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x - \pi)}{x - \frac{\pi}{3}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{x[x] - 4}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - \sqrt{3x + 10}}{\sqrt[3]{x + 3} - 2}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{6 + \sqrt{x}} - 3}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$

چ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 + 2x} - 1}{x}$

ح) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{\sin(1 - x)}$

خ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}$

د) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\tan x}$

ذ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x - \cos x}{\cot x}$

ر) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

۶۲- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^3}{(x - 1)^4 + (x - 1)^3}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)^5 + (x - 2)^2}{3(x - 2)^4 + 2(x - 2)^2}$

۶۳- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - x}{x^3 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad (n \notin \mathbb{N})$

۶۴- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{3x^2 - 12}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x - 10}{x^2 - 2x}$

۶۵- حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 9} + \frac{x^2 + x}{x} \right)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$

۶۶- مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 6}$

۶۷- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{3x} - 5 - 2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{x \sin x}$

۶۸- مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos x - \sin x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$

۶۹- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2a(\sqrt{x+3}-2)}{|x-1|} & x < 1 \\ [x-1] + 1 & x \geq 1 \end{cases}$ مفروض است. a را چنان بیابید که تابع در

 $x = 1$ حد داشته باشد.

۷۰- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x + \sqrt{x}} - 2}{\sqrt[3]{x} - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x\sqrt{x} - 1}$

۷۱- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}}{x^3 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x + 7}}{x^2 + 2x - 8}$

۷۲- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x} - 2 - 1}{x^2 - 9}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{x^2 - 4}$

۷۳- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2-x}}{\sqrt{-4x+1} - 3}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{\sqrt{x} - 1}}{\sqrt{x} - \sqrt{x}}$

۷۴- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2 + \sqrt{x+5}} - \sqrt{5}}{x^2 - 16}$

۷۵- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3 - [x])\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x^2 - 9}$

ب) $\frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{\sqrt{x+2} - 2}$

۷۶- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x^2 + 2x}$

۷۷- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{x^2 - 4}$

۷۸- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 6}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{2x - 2}$

۷۹- حدهای زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3}{|[x] + [-x]|}$

۸۰- حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2}$

۸۱- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{1 - \sqrt{1 + \tan x}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}$

۸۲- حدهای زیر را به روش تغییر متغیر به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sin^3 x}{\cot^2 x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{x \sin 2x}{\cos 3x}$

۸۳- حدهای زیر را به روش تغییر متغیر بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)^2}{x - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x \cos \frac{x}{2}}{1 - \cos 2x}$

۸۴- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\tan \frac{x}{3}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos 4x}}{5x}$

۸۵- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 3x}}{\sin \frac{x}{2}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\tan 3x}$

۸۶- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$

۸۷- حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3 \cos 4x}{\tan^2 3x}$

۸۸- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\tan^2 x}$

۸۹- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin 5x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin \frac{x}{2}}$

۹۰- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan \pi x}{|x^2 - 1|}$

ب) $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{|\cos \pi x|}{1 - \sqrt{2x}}$

۹۱- حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{1 - \cos x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$

۹۲- حاصل حدهای زیر را به روش تغییر متغیر به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2x - \pi)^2}{\cos^2 x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - x)}{\cot 2x}$

۹۳- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan 3x \sqrt{1 - \cos 4x}}{x^3 + x^2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + \tan^2 x}{1 - \cos x}$

۹۴- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \tan 2x}{x^3 + 3x^2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{x^2 - 2x}$

۹۵- حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cos x - \sin 2x}{x^3}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 3x}{\sqrt{1 - \cos 3x}}$

۹۶- حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$

۹۷- حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x - \pi)}{x - \frac{\pi}{3}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 2x}$

درس پنجم: پیوستگی

۹۸- پیوستگی تابع f را در $x = 0$ ، به ازای تمام مقادیر a بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} ax & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

WWW.20SHOO.IR

۹۹- مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f در نقطه‌ای به طول $x = 0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} - 1 & x > 0 \\ x - \frac{a}{x} & x = 0 \\ b + \frac{[x]}{2} & x < 0 \end{cases}$$

۱۰۰- نمودار تابع g را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه $x = -2$ حد راست داشته باشد ولی در

این نقطه پیوستگی راست نداشته باشد.

۱۰۱- مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x = 2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{[x] + a}{x - 1} & x > 2 \\ b - 1 & x = 2 \\ 2bx + \frac{1}{x} & x < 2 \end{cases}$$

۱۰۲- با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را در صورت وجود تعیین کنید.

الف) $f(x) = \begin{cases} 2 - x & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$

ب) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} & x \geq 2 \\ 2 - x & x < 2 \end{cases}$

پ) $f(x) = x[x] \quad -3 \leq x \leq -1$

ت) $f(x) = \frac{x-1}{x-1}$

ث) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$

ج) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \notin \mathbb{Z} \\ x & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

چ) $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$

ح) $f(x) = \frac{x+1}{|x+1|}$

خ) $f(x) = \frac{x\sqrt{|x|}}{|x|}$

۱۰۳- یک بازه بسته بنویسید که تابع $f(x) = \frac{1}{x-1}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

۱۰۴- نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۱، نه حد داشته باشد و نه پیوسته باشد.

۱۰۵- نمودار توابع زیر را رسم کرده و نقاط ناپیوستگی آنها را تعیین کنید.

الف) $f(x) = |x - 1| + 2$

ب) $f(x) = x + [x]$

۱۰۶- نمودار توابع زیر را رسم کرده و نقاط ناپیوستگی آنها را تعیین کنید.

الف) $f(x) = x + |x|$

ب) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \leq 1 \\ -x + 2 & x > 1 \end{cases}$

۱۰۷- مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x = 2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & x > 2 \\ 3 & x = 2 \\ bx + 1 & x < 2 \end{cases}$$

۱۰۸- مقداری a را طوری بیابید که تابع $g(x) = ([x] - a)$ در نقطه $x = -2$ پیوسته باشد.

