

سوالات تشریحی حسابان یازدهم ریاضی - فصل سوم

درس اول: تابع نمایی

۱- تحت شرایط ایده آل جرم یک توده معین از باکتری‌ها، در هر ساعت ۳ برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی گرم باکتری وجود دارد.

الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.

ب) جرم توده را پس از ۱۰ ساعت، برآورد کنید.

پ) جرم توده پس از چند ساعت، ۲۴۳۰۰ میلی گرم خواهد شد؟

۲- خط $y = 10$ نمودار تابع $y = (0.1)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟ (راه حل نوشته شود)

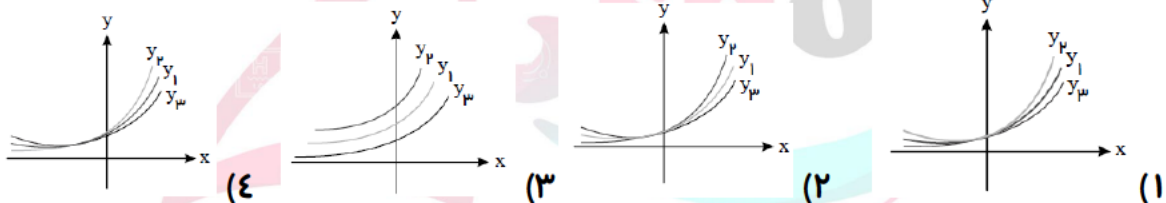
۳- اگر $f(x) = 2^{x+1} - 5$ باشد، مقدار $f^{-1}(27)$ بیابید.

۴- تابع $f(x) = 3^x$ را در نظر بگیرید.

الف) برد تابع را بنویسید.

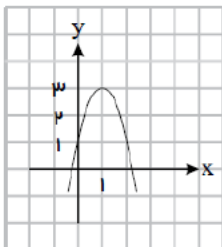
ب) وارون تابع $f(x)$ چیست؟

۵- کدام شکل وضعیت منحنی‌های $y_1 = 2^x$ و $y_2 = 3$ و $y_3 = 0.5$ را درست نشان می‌دهد؟



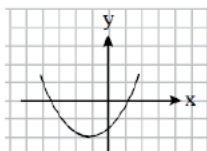
۶- اگر نمودار سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل باشد طوری که

$|a| = 1$ ، ضابطه f و صفرهای تابع را در صورت وجود مشخص کنید.



۷- نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت a ، b و c و تعداد ریشه‌ها و

علامت آن‌ها را تعیین کنید.



۸- اخیراً داروی مسکن جدیدی به بازار عرضه شده است که هر قرص آن شامل ۳۰۰ میلی گرم از ترکیبات دارویی فعالی است که با گذشت هر یک ساعت از زمان مصرف، مقدار آن در خون بیمار نصف می شود.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

زمان سپری شده (ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
مقدار دارویی باقی مانده (میلی گرم)	۳۰۰	۱۵۰					

ب) فرمولی بنویسید که مقدار دارو را در خون بیمار پس از گذشت t ساعت نشان دهد.

۹- در تابع نمایی $f(x) = m \cdot a^x$ اگر $f(2) = 2$ ، $f(5) = \frac{1}{4}$ ، آنگاه حاصل $f(8) - f(0)$ را بیابید.

۱۰- نامعادله زیر را حل کنید:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{3^{4x-1}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{3^{x^2+2}}$$

۱۱- برد تابع $f(x) = \frac{3}{5+2^x}$ را بیابید.

۱۲- معادله $3^x = 1 - 2^{|x|}$ را به روش هندسی حل کنید.

۱۳- اگر $f(x) = 1 - 3^{-x}$ باشد، دامنه‌ی تابع‌های زیر را بیابید.

الف) $y = \sqrt{f(x)}$

ب) $y = \sqrt{xf(x)}$

۱۴- معادلات توانی زیر را حل کنید.

الف) $\frac{2^x + 2^x + 2^x}{(0.125)^{x-1}} = 6$

ب) $\frac{27^x \times 9^{x-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} \times 6^x} = 2^{-x}$

۱۵- نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = |3^x - 1|$

ب) $y = \left| \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 \right| + 1$

۱۶- نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = -2^x + 1$

ب) $y = 2^{|x|} - 1$

۱۷- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $5^x - 2$

ب) $y = 5^x + 1$

۱۸- خط $y = \sqrt[5]{27}$ نمودار تابع $f(x) = 3^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۱۹- نمودار تابع $y = -(0.2)^{|x|} + 2$ را رسم کنید.

۲۰- فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد خط $y = 4$ با تابع نمایی $y = (\sqrt{2})^x$ از مبدأ، چقدر است؟

۲۱- خط $y = \frac{3}{\sqrt[5]{27}}$ نمودار تابع نمایی $f(x) = (\frac{3}{\sqrt[5]{9}})^{-x}$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۲۲- معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $2 \times 16^x = 4^x$ ب) $\frac{1}{7} \times 49^{2x} = \sqrt[3]{7}$

۲۳- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\underbrace{3^x + 3^x + \dots + 3^x}_{\text{تا } 15} = \underbrace{27^x + 27^x + \dots + 27^x}_{\text{تا } 45}$$

۲۴- نمودار تابع $y = -|4^x - 2|$ را رسم کنید.

۲۵- اگر $\frac{1}{y} \geq 7^{-y} \geq 7^x \geq (\frac{1}{4})^x$ باشد، مقادیر $(\frac{1}{4})^x, (\frac{1}{4})^{-y}, (\frac{1}{4})^{-z}$ را از کوچک به بزرگ

مرتب کنید.

درس دوم: تابع لگاریتمی و لگاریتم

۲۶- الف) نمودار تابع $y = \log_2(x - 1)$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را به دست آورید.

ب) به کمک نمودار بالا $\lim_{x \rightarrow 1^-} y$ را بدست آورید.

پ) آیا تابع فوق در همسایگی $x = 1$ تعریف شده است؟

۲۷- حاصل $[\log_6 2] + [\log_2 6]$ برابر است با:

۴) صفر

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

۲۸- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $2 \log_2 8 - 3 \log_5 \sqrt[3]{5} + 2^{\log_2 3}$

ب) $3 \log_{\frac{1}{10}} 1 + \log \sqrt[3]{100} + \log_5 \frac{1}{25}$

پ) $\log_2 32 + \log_{\frac{1}{3}} 81 + \log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3}$

ت) $2^{\log_2 5} - \log_2 3$

ث) $\log_{\sqrt{3}} 8 + 5^{(1 + \log_5 4)}$

ج) $\log_5 \sqrt{125} + \log_4 2 + \log_{\frac{1}{2}} 1$

چ) $\log_3 (\log_3 (\log_5 125))$

ح) $\log_2 5 \times \log_3 6 \times \log_4 7 \times \dots \times \log_{25} 24$

خ) $\frac{1}{\log_2 24} + \frac{1}{\log_3 24} + \frac{1}{\log_4 24}$

۲۹- نمودار تابع $y = |\log_{\frac{1}{5}}(x+3)| + 1$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

۳۰- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(\frac{x-1}{x+2})}$ را بیابید.

۳۱- دامنه تابع $f(x) = \log_{1-x}(\frac{x+1}{x})$ را بیابید.

۳۲- تابع وارون تابع $f(x) = 1 + 2^{3^x}$ را بیابید.

۳۳- حاصل لگاریتم‌های زیر را با استفاده از تعریف لگاریتم بیابید.

الف) $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{100}$

ب) $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt[5]{512}$

۳۴- دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \log|x-3|$

ب) $f(x) = \log_3(x+1)^2$

پ) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x|x-2|$

۳۵- نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $y = 2 - \log_3(x + 1)$

ب) $y = -|\log_{\sqrt{2}}(x - 1)|$

۳۶- دامنه ی توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2-x}{x^2-16}\right)$

ب) $f(x) = \log_{(x-2)}(100 - x^2)$

۳۷- دامنه ی توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \log(x^2 - 7x)$

ب) $f(x) = \log_x(9 - x^2)$

۳۸- حاصل لگاریتم های زیر را با استفاده از تعریف لگاریتم بیابید.

الف) $\log_2 \sqrt{32}$

ب) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$

پ) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{5}{\sqrt[3]{25}}$

۳۹- در صورت وارون پذیر بودن، تابع وارون توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = 1 + \log(2x)$

ب) $f(x) = 3 \log_5(x - 1)$

۴۰- وارون پذیری توابع زیر را بررسی کرده و در صورت وارون پذیر بودن تابع وارون هر کدام را بیابید.

الف) $f(x) = 5 \times 3^{2x}$

ب) $f(x) = 4^{x-1} - 3$

۴۱- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = |\log(x - 1)|$

ب) $y = 1 + |\log(x + 2)|$

۴۲- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x - 2)$

ب) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x + 1)$

۴۳- نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $y = \log_2(x + 2)$

ب) $y = \log_2(x - 1)$

درس سوم: ویژگی های لگاریتم و حل معادله های لگاریتمی

۴۴- اگر نمودار تابع $f(x) = 2 + \log_a x$ از نقطه $(\frac{1}{3}, -2)$ عبور کند، آنگاه مقدار a را به دست آورید.

۴۵- حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = \log_3\left(\frac{9}{\sqrt[4]{27}}\right) + \log_{\frac{1}{10}} 0.001$$

۴۶- اگر $f(x) = \log_3(7x^2 - 1)$ ، مقدار $f^{-1}(3)$ را به دست آورید. (راه حل نوشته شود)

۴۷- حاصل عبارت $\log_7 \sqrt[3]{49^2}$ کدام گزینه است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

۴۸- الف) حاصل عبارت $\log_8 + \log_2 (\sqrt{10})$ را به دست آورید.

ب) معادله لگاریتمی مقابل را حل کنید.

$$\log(x^2 + 1) - 2 \log x = 1$$

۴۹- معادله های زیر را حل کنید.

الف) $(\log_3 x)^2 + 2 = \log_3 x^3$

ب) $\log_9 x + \log_3 \sqrt{x} = \frac{1}{4}$

۵۰- اگر $\log_{21} 27 = m$ ، آنگاه $\log_6 16$ را بر حسب m بیابید.

۵۱- حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = 16^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log_4 3} + 25^{\log_{125} 6}$$

۵۲- اگر $\log 5 = m$ باشد، حاصل $\log_{\epsilon} 25$ را بر حسب m بیابید.

۵۳- حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\log_9 16 \times \log_2 (\log_5 125) \times \log_{\sqrt{5}} 49 \times \log_{\sqrt[3]{7}} 25$$

۵۴- حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = \frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_{16} 9} - \frac{1}{\log_8 3}$$

۵۵- اگر $\frac{\log_{ab} x}{\log_a x} = \frac{1}{\epsilon}$ ، آنگاه حاصل $\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{\log_a b}$ را بیابید.

۵۶- حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $\frac{1}{3^{\log_3 25}} + 2^{-\log_2 3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 5}$

ب) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 7} + \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{-5 \log_2 3} - 2^{-\log_{\frac{1}{2}} 7}$

۵۷- دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \log(x - 2) + \log(x + 7)$

ب) $g(x) = \log(x - 2)(x + 7)$

۵۸- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log\left(\frac{x-5}{2}\right) = \frac{1}{2} \log(3x+1)$

ب) $\log(x+3) + \log(x-3) - \log x = 3 \log 2$

۵۹- عبارتهای زیر را به صورت جمع و تفریق لگاریتم‌ها بنویسید.

الف) $\log \frac{\sqrt[3]{xy^2}}{z^7}$

ب) $\log\left(\frac{x^3 \sqrt{x+y}}{zt^{\epsilon}}\right)$

۶۰- اگر $\log_2(1+x)$, $2 \log_2 \sqrt{x}$, $\log_2(1-x)$ به ترتیب از چپ به راست جملات متوالی

یک دنباله‌ی حسابی باشند، مقدار $\log_{\frac{1}{8}} x$ را بیابید.

۶۱- حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = \epsilon^{1 + \log_{\sqrt{2}} 3}$$

۶۲- معادله $\log_3(x-1) + \log_3\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2$ را حل کنید.

۶۳- معادله لگاریتمی روبه‌رو را حل کنید:

$$\log_3(x-1) + \log_3(x+7) = 2 \log_3(x+1)$$

۶۴- نیم عمر ماده‌ای ۸ روز است. اگر جرم اولیه این ماده ۲۰۰۰ گرم باشد، پس از چه مدت جرم

این ماده به ۱ گرم می‌رسد؟ ($\log 2 = 0.3$)

۶۵- معادله لگاریتمی مقابل را حل کرده و مجموعه جواب را مشخص کنید.

$$\log_3(x-1) + \log_3\left(\frac{x}{3} + 1\right) = 2$$

۶۶- معادله لگاریتمی $\log_3(x^2 - 1) = 1 + \log_3(x + 3)$ را حل کنید.

۶۷- معادله لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\log(x-1) + \log\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \log 18 - \log 2$$

۶۸- نیمه عمر عنصری ۲۵ سال است. اگر جم اولیه آن ۲۴ میلی‌گرم باشد، بعد از ۴۰ سال جرم

این عنصر چقدر خواهد بود؟ ($2^{-1/6} \approx 0.32$)

۶۹- معادله لگاریتمی $\log(x+3) + \log(x-3) - \log x = 3 \log 2$ را حل کنید.

۷۰- نیمه عمر یک ماده ۴۸ ساعت است. اگر ۲۵۶ گرم از این ماده را در اختیار داشته باشیم،

جرمی که پس از ۹۶ ساعت باقی می‌ماند، چقدر است؟

۷۱- معادلات زیر را حل کنید.

$$\log_4 \log_2 \log_{\sqrt{5}} x = \frac{1}{2} \quad \text{الف)}$$

$$\text{ب)} \frac{\log(x+33)}{1 + \log 3} = 2$$

۷۲- معادله زیر را حل کنید.

$$x^{(2 - \frac{1}{2} \log_3 x)} = 9$$

۷۳- معادله زیر را حل کنید.

$$x^{\log_5 x} = 5^{100}$$

۷۴- دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

$$\text{الف)} f(x) = \log_3 \log_2(x-4)$$

$$\text{ب)} f(x) = \log_2 \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$$

۷۵- نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x} - 1) > 0$

ب) $\log(7 + 2x) < \log 2$

۷۶- حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_4 9} - \frac{1}{\log_8 3}$

ب) $\log_4 \log_2 \log_3 81 + \log_8 \log_3 \sqrt{81}$

۷۷- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log_2 x \times \log_4 x \times \log_8 x \times \log_{16} x = \frac{2}{3}$

ب) $\frac{1}{1 - \log x} + \frac{4}{2 + \log x} = 3$

۷۸- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{17}{4}$

ب) $25^{\log x} = 5 + 4 \times 5^{\log x}$

۷۹- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

ب) $\log_4(\log_3(\log_2 x)) = 0$

۸۰- نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\log_3(2x - 1) < 2$

ب) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 4) < 3$

۸۱- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log(x^2 + 3x - 4) = \log(5x - 1)$

ب) $\log_2(x + 3) + 2 \log_2 3 = \log_2(x + 4) + \log_2 8$

۸۲- اگر $\log_3 \sqrt{x} + \log_{\frac{1}{3}} x = -1$ باشد، آن گاه لگاریتم $x\sqrt{x}$ در پایه‌ی ۹ را بیابید.