

## ریاضیات گسسته دوازدهم فصل اول درس سوم تشریحی

۱- اگر  $a \equiv b^m$  و  $n|m$  ثابت کنید  $a \equiv b^n$ .

۲- اگر  $k \in \mathbb{Z}$ ، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان پذیر است.

$$k \equiv 0 \pmod{3} \text{ یا } k \equiv 1 \pmod{3} \text{ یا } k \equiv 2 \pmod{3}$$

(به عبارت دیگر،  $k \in [0]_3$  یا  $k \in [1]_3$  یا  $k \in [2]_3$ )

۳- عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته هم نهشتی به پیمانه ۹ تعلق دارد؟

۴- درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید:

الف اگر  $a|b$  آن گاه  $[a, b] = |b|$

ب معادله هم نهشتی  $ax \equiv b^m$  دارای جواب است اگر و تنها اگر  $(a, b)|m$ .

۵- گزاره‌های درست را مشخص کرده و برای گزاره‌های نادرست، مثال نقض ارائه کنید.

الف برای هر عدد طبیعی  $n$  بزرگ‌تر از ۱، عدد  $2^n - 1$  اول است.

ب برای دو عدد طبیعی  $a$  و  $b$  اگر  $a|b$  آنگاه  $[a, b] = |b|$

پ معادله هم نهشتی  $ax \equiv b^m$  دارای جواب است، اگر و تنها اگر  $(a, b)|m$

۶- همه اعداد صحیح چون  $a$  را بیابید که ۵ برابر آن‌ها به علاوه ۹ بر ۱۱ بخش پذیر باشد.

۷- باقی مانده تقسیم عدد  $500! + 499! + 498! + \dots + 2! + 1!$  را بر ۱۰ به دست آورید. (رقم یکان  $A$  را بیابید.)

۸- با تبدیل معادله سیاله خطی  $29000x + 5000y = 2000$  به معادله همنهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.

۹- باقی مانده تقسیم  $19 + (27)^7$  را بر ۱۳ بیابید.

۱۰- با تبدیل معادله سیاله خطی  $5x + 2y = 18$  به معادله هم نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.

۱۱- اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد. در این صورت با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید

۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۲- اگر باقیمانده تقسیم  $m$  و  $n$  بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقیمانده تقسیم عدد  $3m - 5n$  بر ۱۳ را به دست آورید.

۱۳- معادله همنهشتی  $13 \equiv 3^y x$  را حل و جواب عمومی آن را به دست آورید.

۱۴- شخصی در یک مسابقه علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به دست آورد؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد.)

۱۵- به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

۱۶- به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۱۷- اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۸- اگر اول مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۹- به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

۲۰- جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی  $11 = 5y + 7x$  را به دست آورید.

۲۱- اگر دو عدد  $(3a - 5)$  و  $(4a - 7)$  رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد  $(9a + 6)$  را به دست آورید.

۲۲- باقی مانده تقسیم عدد  $9 \times (2^{11} + 7)$  را بر ۲۳ بیابید.

۲۳- ثابت کنید عدد  $125^1 - 115^1 - 235^1$  بر عدد ۱۳۲ بخش پذیر است.

۲۴- با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیام یعنی،

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} \times a^n + \binom{n}{1} \times a^{n-1}b + \binom{n}{2} \times a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n} \times b^n$$

ثابت کنید که برای هر  $n \in \mathbb{Z}$  و  $a, b \in \mathbb{Z}$  همواره  $(a + b)^{ab} \equiv a^n + b^n$

۲۵- عکس عبارت «اگر باقی مانده‌های تقسیم دو عدد  $a$  و  $b$  بر  $m$  مساوی باشند آنگاه  $a \equiv b^m$  را بیان و اثبات کنید.

۲۶ - ثابت کنید: اگر باقی مانده های تقسیم دو عدد  $a$  و  $b$  بر  $m$  مساوی باشند آن گاه  $a \equiv b^m$

۲۷ - فرض کنیم،  $a \equiv b^m$  و  $b \equiv c^n$  و  $(m, n) = d$  این صورت ثابت کنید  $a \equiv c^d$

۲۸ - صورت کلی جواب های معادله هم نهشتی  $۷۳x \equiv ۱^{۲۳}$  را بیابید:

۲۹ - اگر  $۷x - ۲ \in [۶]_۳$  صورت کلی  $x$  را بیابید.

۳۰ - اگر  $x, y$  جواب هایی از معادله سیاله  $۱۴x + ۱۱y = ۵۶$  باشند آنگاه باقیمانده تقسیم  $x$  بر

۱۱ را بیابید:

۳۱ - اگر معادله  $۷n + ۱۳ = ۵۴x + ۲۱y$  در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب باشد  $n$  چه

مقادیری می تواند داشته باشد؟

۳۲ - اگر  $a \equiv b^m$  ثابت کنید:

$$(a, m) = (b, m)$$

۳۳ - فرض کنید  $a \equiv b^m$  آنگاه ثابت کنید:  $ka \equiv kb^{km}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

۳۴ - معادله های هم نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب های عمومی آنها را به دست آورید.

الف

$$۴۲۳x \equiv ۷۹^{۱۱}$$

ب

$$۸x \equiv ۲۰^{۱۲}$$

پ

$$۵۱x \equiv ۱۱^۶$$

۳۵ - پاسخ هر یک از سؤالات زیر را به دست آورده و دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید.

الف اگر  $a$  عددی صحیح و فرد باشد  $۲|a+b$  در این صورت باقی مانده تقسیم عدد  $a^۲ + b^۲ + ۳$  را بر ۸ بیابید.

ب مطلوب است باقی مانده تقسیم عدد  $A = (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ + ۱۰$  بر عدد ۷

۳۶ - معادله  $7x \equiv 1 \pmod{4}$  را حل کنید.

۳۷ - باقی مانده تقسیم عدد  $11 + 9 \times (1000)^{25} = A$  را بر ۷ بیابید.

۳۸ - معادله هم نهشتی  $20 \equiv 8x \pmod{12}$  را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.

۳۹ - باقی ماند  $G$  تقسیم  $(38^{36} + 19)$  را بر ۴ به دست آورید.

۴۰ - فرض کنیم  $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$  اگر  $a \equiv b \pmod{m}$  و  $n \in \mathbb{N}$  ثابت کنید:  $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

۴۱ - معادله سیاله  $19 = 2x + 5y$  را حل کنید.

۴۲ - رقم یکان عدد  $(7 + 2^{11})$  را به دست آورید.

۴۳ - معادله هم نهشتی  $2 \equiv 5x \pmod{11}$  را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.

۴۴ - باقی مانده تقسیم  $7^{30}$  بر ۱۵ را به دست آورید.

۴۵ - باقی مانده تقسیم  $13^{22}$  را بر ۱۷ به دست آورید.

۴۶ - باقیمانده تقسیم  $3^{15}$  بر ۱۷ را بیابید:

۴۷ - تمام جواب های  $n$  که به ازای آن ها معادله  $(2m^2 + 1)x(2m - 4)y = n$  همواره در  $\mathbb{Z}$  جواب دارد را بیابید:

۴۸ - باقیمانده تقسیم  $17^{19}$  بر ۲۵ را بیابید.

۴۹ - ثابت کنید  $\emptyset = [15]_3 \cap [10]_2$

۵۰ - کمترین تعداد تمبر لازم برای بسته ای که نیاز به ۱۸۵۰ ریال تمبر دارد با تمبرهای ۷۰ و ۶۰ ریالی چقدر است؟

۵۱ - ثابت کنید:  $[5]_8 \subseteq [37]_{24}$

۵۲ - جواب های عمومی معادله سیاله خطی  $9x + 13y = 7$  را به دست آورید.

۵۳ - ثابت کنید می توان دو طرف یک رابطه هم نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد، به عبارتی

دیگر، برای اعداد صحیح  $a, b, c$  و عدد طبیعی  $m$  اگر  $a \equiv b \pmod{m}$  آن گاه  $ac \equiv bc \pmod{m}$